УДК 539.3

ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.А. Бочкарева*, Б.А. Люкшин, А.И. Реутов*

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН. г. Томск
E-mail: borisljuk@mail.2000.ru
*Томский университет систем управления и радиоэлектроники

При анализе надежности конструкций из полимерных и полимерных композитных материалов применяется вероятностный подход, поскольку для реальных материалов всегда существует некоторый разброс количественных характеристиках их свойств, для конструкций — отклонения размеров от их номинальных значений, для нагрузок — отклонения от средних эксплуатационных значений. Обработка массива параметров напряженно-деформированного состояния конструкций, полученных в результате численных и натурных экспериментов, проводится с помощью методов теории вероятности и математической статистики.

Введение

При анализе параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций и оценке их работоспособности распространенным является подход, который можно назвать детерминистским. Принимается, что все параметры, которыми определяется НДС конструкции, являются определенными с известной точностью величинами. Для задач анализа НДС деталей и конструкций это три группы параметров. Первая из них определяет свойства материала, вторая – геометрию конструкции, третья – способ приложения и интенсивность приложенных нагрузок. Все эти характеристики в той или иной степени носят случайный характер, а конкретные их величины, задаваемые в детерминистском подходе, являются некоторыми средними приближенными значениями. Существующий разброс параметров и их отклонение от средних значений учитывается введением коэффициента запаса прочности, чем компенсируется неопределенность информации о точных значениях. Можно говорить, что величина коэффициента запаса прочности – это характеристика уровня знания (вернее, незнания) точных значений этих параметров.

Возможность разрушения изделия, таким образом, носит вероятностный характер, и она должна оцениваться соответствующими количественными характеристиками. Вероятностный характер имеют не только выше перечисленные параметры материала, конструкции и нагрузки, но и сами критерии разрушения, поскольку они представляют собой обработку некоторого массива экспериментальных данных. При оценке вероятности безотказной работы (ВБР) необходимо сопоставлять расчетные или экспериментальные данные о НДС конструкции во всех ее точках, имеющие вероятностный характер, с критериями прочности, имеющими такой же смысл. Подобные подходы разрабатываются, например, в [1, 2]. Отличительные особенности предлагаемой работы заключаются в учете разбро-

са параметров материала не только от опыта к опыту, но и по самим конструкциям, что связано с технологическими особенностями их изготовления.

Физическая и математическая постановка

Качество изделий из полимерных композитных материалов (ПКМ), получаемых различными технологическими способами, определяется свойствами его фаз, зависящими как от рецептуры, так и от режимов переработки материала. В большинстве случаев операции изготовления ПКМ и изделия из него совмещаются при использовании различных технологий изготовления изделий: свободным литьем и литьем под давлением, прессованием, экструзией и т.д. Нестабильность параметров технологических процессов приводит к тому, что деформационно-прочностные свойства изделий и их геометрические размеры являются не детерминированными, а случайными значениями. Более того, в разных точках по объему пресс-формы отличаются уровни давления, температурный режим и т.д. Случайными величинами в условиях эксплуатации являются и внешние воздействия, например, снеговая или ветровая нагрузка, скачки давления в трубопроводе при срабатывании запорной арматуры или включении и выключении насосов и т.д. Для описания поведения конструкций всем прочностным и геометрическим характеристикам, а также внешним воздействиям придается вероятностный характер.

Для построения полей ВБР конструкций из ПКМ с учетом нестабильности их свойств определяются параметры НДС конструкции, которые носят вероятностный характер, строятся кривые распределения значений эквивалентных напряжений и/или деформаций в каждой точке конструкции и сравниваются с экспериментально полученными предельными напряжениями, имеющими также вероятностный характер.

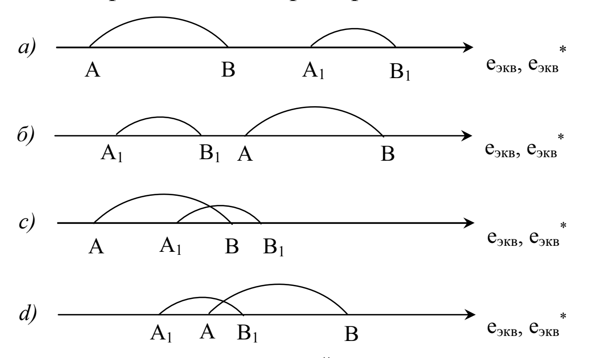


Рис. 1. *Варианты распределений эквивалентных деформаций и предельных значений в точке конструкции* $e_{экв}$

Рассмотрим возникающие в связи с этим варианты (рис. 1). Считаем для конкретности, что критерием, по которому можно судить о работоспособности материала, является так называемая эквивалентная деформация. На оси эквивалентных деформаций $e_{экв}$ отрезком AB обозначим область, в которую попадают все эквивалентные деформации в данной точке конструкции при натурном или численном моделировании НДС изделия. При численном анализе это означает проведение ряда расчетов, в которых часть параметров или все параметры, определяющие НДС конструкции, являются случайными величинами. В натурном эксперименте это означает проведение ряда испытаний одного и того же или нескольких подобных изделий. На этой же оси отрезком A_1B_1 обозначим интервал эквивалентных деформаций $e_{экв}$*, соответствующих разрушению, или пределу текучести материала при экспериментальных исследованиях.

Тогда в случае *a* (рис. 1) в данной точке конструкции разрушение исключено, в случае *b* разрушение произойдет обязательно. В случае *c* область "перекрытия", отрезок A_1B, есть не что иное, как характеристика (вероятность) разрушения (точнее, она определяется отношением A_1B/AB), а в случае *d* – область AB_1 (AB_1/AB) – вероятность неразрушения.

Эти оценки справедливы, если вероятность попадания эквивалентных деформаций в данной точке конструкции в любое место внутри отрезка AB одинакова, а уровни $e_{экв}$*, отвечающие разрушению материала при его испытаниях, равномерно распределены по отрезку A_1B_1. Экспериментально установлено, что на самом деле распределения этих параметров подчиняются нормальному закону. В этом случае для вариантов *a* и *b* (рис. 1) все рассуждения сохраняют свою силу, а для вариантов *c* и *d* нужно оценивать так называемую область "перекрытия" кривых распределения $e_{экв}$ и $e_{экв}$*.

Область "перекрытия" (рис. 2), полученная в результате сопоставления кривых распределения эквивалентных деформаций и их предельных значений, и является областью вероятного отказа работы конструкции [2].

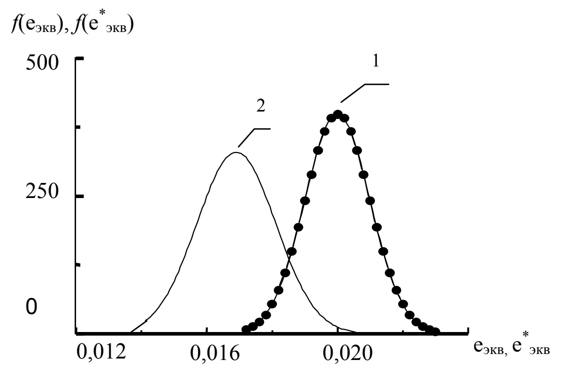


Рис. 2. *Пример распределений: 1) предельной и 2) реальной эквивалентных деформаций*

В работе предлагаемый подход иллюстрируется на примере построения поля вероятностей безотказной работы для конструкции в виде участка трубы, выполненной из полимерного материала на основе полипропилена, используемого для производства трубопроводов различного технологического значения – транспортировки воды, газа и т.д. Одним из значимых параметров, определяющим НДС изделия, является модуль упругости материала. Экспериментально установлено, что от наблюде-

ния к наблюдению значения модуля упругости отличаются от его среднего значения в пределах 20 %. При математическом моделировании случайное изменение модуля упругости от наблюдения к наблюдению задается с помощью датчика псевдослучайных чисел [3]. Согласно экспериментальным данным, это изменение подчиняется нормальному закону распределения. В качестве эквивалентной деформации, по которой можно судить о работоспособности материала в конструкции, принимается интенсивность деформаций. В силу осевой симметрии задачи рассматривается расчетная область, представляющая собой часть осевого сечения трубы, и решается осесимметричная задача теории упругости (рис. 3).

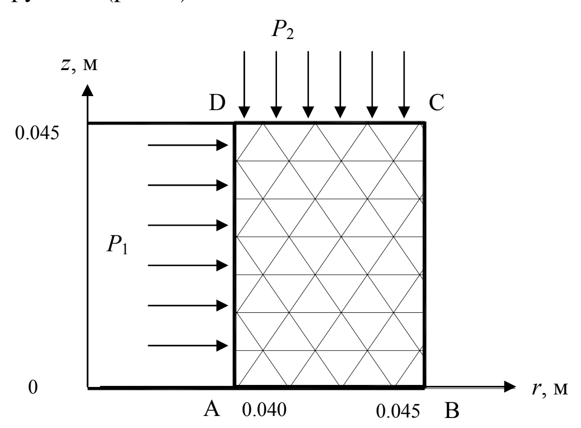


Рис. 3. *Расчетная схема нагруженного участка трубы*

В качестве внешних нагрузок принимаются одновременно приложенное внутреннее давление P_1 и осевое сжатие P_2. Для упругой трубы под действием внутреннего давления известно решение Ламе [4], которое в данном случае служит для тестирования программы.

В каждой точке контура области ABCD необходимо ставить по два условия (задача является двумерной по пространственным переменным), задаваясь вектором напряжений, вектором перемещений или по одной из разнонаправленных компонент этих векторов. В примере использованы следующие условия.

На линии AB ставятся условия скольжения вдоль жесткой стенки:

$$u = 0,\ \sigma_\tau = 0,$$

где u – радиальное смещение, σ_τ – касательные напряжения.

На линии BC напряжения отсутствуют:

$$\sigma_n = \sigma_\tau = 0,$$

где σ_n – нормальные напряжения.

На линии CD: $\sigma_n = -P_2$, $\sigma_\tau = 0$.

На линии AD: $\sigma_n = -P_1$, $\sigma_\tau = 0$.

Метод решения

Численная реализация задачи определения параметров НДС конструкции для каждого конкретного варианта распределения его свойств по объему изделия проводится методом конечных элементов с использованием разбиения расчетной области на конечные элементы треугольной формы. Метод основан на использовании соотношения:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}]\{U\} + \{f^{(e)}\}, \qquad (1)$$

где $\Pi^{(e)}$ – потенциальная энергия отдельного элемента системы, $\{U\}$ – узловые перемещения, $\{f^{(e)}\}$ – вектор нагрузки, $[k^{(e)}]$ – матрица жесткости отдельного элемента, представляющая собой объемный интеграл вида:

$$[k^{(e)}] = \int\limits_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}][B^{(e)}]dV. \qquad (2)$$

Для разбиения расчетной области используются треугольные конечные элементы с шестью компонентами узловых перемещений. Для уменьшения вычислительных ошибок треугольные элементы выбираются возможно более правильной геометрической формы, без тупых углов.

Уравнения для элемента записываются в цилиндрической системе координат. Компоненты перемещения u, v аппроксимируются внутри треугольного элемента соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Vmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{Vmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \qquad (3)$$

Соотношение (1) содержит три функции формы, которые в линейном случае имеют вид:

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z),$$

где A – площадь треугольного элемента, a_i, b_i, c_i – коэффициенты, вычисленные по значениям узловых координат.

Для осесимметричной задачи используются геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r};\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z};\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r};\ \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}. \qquad (5)$$

Матрица упругих характеристик $[D]$ в случае осесимметричной задачи и для изотропного материала имеет порядок 4×4:

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{Vmatrix}.$$

Дифференцируя (3) и используя выражения для функций формы, получим соотношения для деформаций:

$$\{\varepsilon\} = [B]\cdot\{U\}, \qquad (6)$$

где $[B]$ – матрица, которая содержит коэффициенты, являющиеся функциями координат. Матрица жесткости $[B]$ для элемента представляет собой объемный интеграл и содержит коэффициенты, которые являются функциями координат r и z, и поэтому не могут быть вынесены за знак интеграла. В [5] предлагается использовать следующую формулу для матрицы жесткости:

$$[k^{(e)}] = [\overline{B}^{(e)}]^T \cdot [D^{(e)}]\cdot[\overline{B}^{(e)}]\cdot 2\pi\cdot\bar{r}A, \qquad (7)$$

где $[\overline{B}^{(e)}]$ – матрица коэффициентов, вычисленная по значениям r и z в центре элемента для строки, содержащей функции формы. Матричное уравнение для ансамбля элементов имеет вид:

$$[K]\cdot\{U\} = \{F\}, \qquad (8)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, которая собирается из матриц жесткости элементов, $\{F\}$ – глобальный вектор-столбец нагрузки.

$$[K] = \sum_{e=1}^{E}[k^{(e)}],\ \{F\} = -\sum_{e=1}^{E}\{f^{(e)}\}.$$

Соотношение (8) представляет собой матричную форму записи системы линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора перемещений во всех узлах конечно-элементной сетки. Эта система линейных уравнений решается методом Гаусса. Затем деформации во всех ячейках сетки определяются по соотношению (6), а напряжения в элементах вычисляются по закону Гука

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}.$$

Определение вероятностей безотказной работы конструкции

Задача вероятностного расчета сводится к многократному определению параметров НДС, которые являются случайными величинами. В результате обработки полученного массива данных определяются характеристики параметров НДС – математическое ожидание μ_s и среднеквадратичное отклонение σ_s. Они оцениваются для значений интенсивности деформации в каждой конечно-элементной ячейке расчетной сетки по соответствующим формулам теории вероятностей, что позволяет построить функции плотности распределения [2].

Плотность нормального распределения интенсивности деформаций s имеет вид

$$f_s(s) = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right], -\infty < s < \infty.$$

Аналогичному закону подчиняется плотность нормального распределения предельных деформаций S

$$f_s(S) = \frac{1}{\sigma_S\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}\right)^2\right], -\infty < S < \infty,$$

где μ_s – математическое ожидание интенсивности деформаций, σ_s – среднее квадратичное отклонение интенсивности деформаций, μ_S – математическое ожидание предельных деформаций, σ_S – среднее квадратичное отклонение предельных деформаций.

Введем случайную величину $y=S–s$. Принимаем, что случайная величина y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$\mu_y = \mu_S - \mu_s$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_s^2}.$$

Тогда ВБР можно выразить через y как

$$R = P(y>0) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]dy.$$

Если $x=(y–\mu_y)/\sigma_y$, то $dx=dy$. При $y = 0$ нижний предел случайной величины x имеет вид

$$x = \frac{0-\mu_y}{\sigma_y} = -\frac{\mu_S-\mu_s}{\sqrt{\sigma_S^2-\sigma_s^2}},$$

а при $y\to+\infty$ верхний предел $x\to\infty$. Следовательно,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\mu_S-\mu_s}{\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_s^2}}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx. \qquad (9)$$

Ясно, что $x=(y–\mu_y)/\sigma_y$ является нормированной случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Следовательно, вероятность безотказной работы можно найти с помощью таблиц функции нормального распределения.

Формулу (9) можно представить в виде:

$$R = 1-\Phi\left(-\frac{\mu_S-\mu_s}{\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_s^2}}\right). \qquad (10)$$

где Φ – интеграл Лапласа.

Полученная функция плотности распределения вероятностей значений интенсивности деформаций e_i подчиняется нормальному распределению. Функция плотности распределения вероятностей для экспериментально полученных предельных значений интенсивности деформаций e_i^* имеет вид, показанный на рис. 2 (кривая 1). Область пересечения этих кривых является областью отказа. Величина вероятности отказа (безотказной работы) вычисляется по приведенной формуле (10). Определив значения x, можно с помощью таблицы нормального нормированного распределения определить величину вероятности безотказной работы конструкции.

Результаты расчетов

Сопоставляя полученные деформации с предельными экспериментальными значениями, имеющими также случайное распределение (с характеристиками μ_S=0,02, σ_S=0,001 для ПКМ на основе полипропилена), получаем в каждой точке трубы по ее толщине значение функции R (ВБР) материала. Из анализа решения следует, что наибольшие деформации получаются на внутренней стенке трубы, а вероятность безотказной работы ее в этих точках является наименьшей (рис. 4). Если в какой либо точке конструкций вероятность безотказной работы меньше требуемого (нормативного) значения, то можно говорить о вероятности разрушения конструкции в целом. В качестве нормативного значения вероятности безотказной работы можно принять, например, характеристику, связанную с отношением стоимости планового ремонта изделия к стоимости устранения последствий аварийного разрушения [6].

Анализ влияния трех параметров (толщины стенки трубы r, внутреннего давления P_1 и осевого сжатия P_2) на напряженно-деформированное состояние конструкции и соответственно на вероятность безотказной работы R показывает, что наиболее значимым параметром является Δr, далее по убывающей P_1 и P_2. Это означает, что при производстве полимерных труб их толщина должна контролироваться наиболее тщательно.

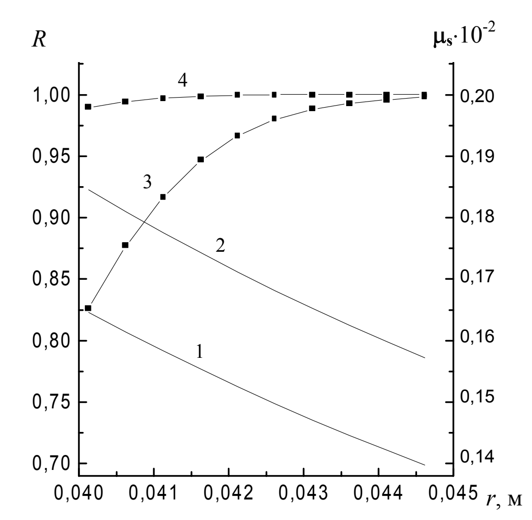


Рис. 4. *Распределение математического ожидания интенсивности деформаций μ_s (1, 2) и вероятности безотказной работы R (3, 4) по толщине стенки трубы r; кривые 1, 4) соответствуют уровню внутреннего давления P_1 = 4,5 МПа и осевого сжатия P_2 = 1 МПа, кривые 2, 3) P_1 = 5 МПа, P_2 = 2 МПа*

Таким образом, ответ на вопрос о надежности, или о возможном разрушении конструкции, при рассматриваемом подходе получается в виде вероятности разрушения (неразрушения) материала во всех точках изделия, что можно представить в виде полей распределения ВБР по всему объему конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
2. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. – М.: Мир, 1980. – 351 с.
3. Теннант-Смит Дж. Бейсик для статистиков. – М.: Мир, 1988. – 208 с.
4. Любошиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов. – Минск: Вышэйшая школа, 1969. – 460 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
6. Юдин А.В., Кучерявый В.И. Расчет надежности конструктивных элементов при растяжении с кручением // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 5. – С. 56–61.

УДК 539.621+674.053